



DOI: 10.29298/rmcf.v16i89.1508

Artículo de Investigación

Ecuaciones de ahusamiento y volumen implícito para *Pinus leiophylla* Schiede ex Schltldl. & Cham. en Michoacán

Tapering and implied volume equations for *Pinus leiophylla* Schiede ex Schltldl. & Cham. in state of Michoacán

H. Jesús Muñoz-Flores¹, Jonathan Hernández-Ramos^{2*}, Rubén Barrera-Ramírez¹, Xavier García-Cuevas³, Adrián Hernández-Ramos⁴, Martín Gómez-Cárdenas¹

Fecha de recepción/Reception date: 30 de julio de 2024.

Fecha de aceptación/Acceptance date: 13 de marzo de 2025.

¹Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Campo Experimental Uruapan. México.

²Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Campo Experimental Bajío. México.

³Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Campo Experimental Chetumal. México.

⁴Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias, Campo Experimental Saltillo. México.

*Autor para correspondencia; correo-e: forestjonathanhdez@gmail.com

*Corresponding author; e-mail: forestjonathanhdez@gmail.com

Resumen

La descripción del ahusamiento (di) y la estimación precisa del volumen fustal (Vf) son fundamentales en la estimación de las existencias maderables y la distribución de productos. El objetivo del estudio fue ajustar una función de ahusamiento y definir el modelo de Vf implícito para árboles de *Pinus leiophylla* en la comunidad indígena Patambán, Tangancícuaro, Michoacán, México. Con información de 36 árboles dominantes provenientes de plantaciones forestales (245 datos de diámetro normal [d], diámetros [di] y alturas [Ai] a distintas secciones del fuste), se ajustaron ocho funciones de ahusamiento. Mediante Modelos de efectos mixtos (MEM) y la técnica de Máxima verosimilitud se realizó la corrección de heterocedasticidad y autocorrelación, con la expresión $varExp: var(\epsilon_{ij}) = exp^{2\delta_1 \cdot v_i}$ y una estructura de media móvil (ARMA) de orden (p, q), respectivamente. Estadísticamente, la expresión de ahusamiento de *Clutter*: $di = 2.256 \times d^{0.943} \times (At - Ai)^{1.434+ui} \times At^{-1.617}$ fue más precisa al incluir de forma aditiva el efecto aleatorio (ui) en el parámetro relacionado a la altura total (At). La explicación de la variabilidad muestral fue de 97.8 %, con un error global de estimación de 1.406 cm y sesgo individual de 0.0138 cm. El modelo de Vf implícito fue *Schumacher-Hall*: $Vf = 1.3150 \times At^{0.6345} \times d^{3.8853}$ (d y At en m). Las expresiones propuestas pueden incluirse de manera confiable en la descripción de datos de inventarios o en las estimaciones de rendimiento para cultivos forestales.

Palabras clave: Aprovechamiento forestal, *Clutter*, efectos mixtos, mercado diferenciado, perfil fustal, *Schumacher-Hall*.

Abstract

The description of the taper (di) and the precise estimation of the stem volume (sV) are fundamental in the estimation of the timber stock and the distribution of products. The objective of the study was to fit a taper function and define the implicit sV model for *Pinus leiophylla* trees in the indigenous community of *Patambán, Tangancicuaro*, state of *Michoacán*, Mexico. Eight taper functions were fitted using data from 36 dominant trees from forest plantations (245 normal diameter [d], diameters [di] and heights [Ai] at different stem sections). Mixed effects models (MEM) and the maximum likelihood technique were utilized to correct for heteroscedasticity and self-correlation with the expression $varExp: var(\epsilon_{ij}) = exp^{2\delta_1 v_i}$ and a moving average (ARMA) structure of order (p, q), respectively. Statistically, Clutter's taper expression: $di = 2.256 \times d^{0.943} \times (Th - Ih)^{1.434+ui} \times Th^{-1.617}$ was more accurate as it included the random effect (ui) additively in the total height parameter (Th). The explanation of sampling variability was 97.8 %, with an overall estimation error of 1.406 cm and an individual bias of 0.0138 cm. The implicit sV model was Schumacher-Hall: $Sv = 1.3150 \times Th \times d^{3.8853}$ (d and Th in m). The proposed expressions can be reliably included in the description of inventory data or yield estimates for forest crops.

Key words: Forest harvesting, Clutter, mixed effects, differentiated market, forest profile, Schumacher-Hall.

Introducción

Con la descripción del diámetro a distintas alturas sobre el fuste (ahusamiento: di , cm) se puede detallar la información de un inventario alcuantificar la distribución de productos y ajustar las existencias maderables para un mercado diferenciado (Rachid et al., 2014). En la literatura existen diversas expresiones matemáticas que contribuyen a describir el di . En México se han utilizado modelos de manera satisfactoria en distintas especies y condiciones de crecimiento, los de tipo polinómico de orden n (Hernández-Ramos et al., 2018; Ramírez-Martínez et al., 2018), exponenciales (Pompa et al., 2009) y segmentados (Hernández-Ramos et al., 2017; Tamarit et al., 2014). De igual manera, sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial (Cruz-Cobos et al., 2008; García-Espinoza et al., 2019) o de razón de volumen (Cruz-Cobos et al., 2023).

Generalmente, el ajuste estadístico se hace mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) (Rachid et al., 2014), ecuaciones aparentemente no correlacionadas (SUR) (Flores et al., 2021), máxima verosimilitud (FILM) (Hernández-Ramos et al., 2017), mínimos cuadrados generalizados no lineales

(MCGNL) (Monárrez-González et al., 2024) y algoritmo de minimización de la suma de cuadrados de *Marquardt* (Niño et al., 2018). Sin embargo, los modelos de efectos mixtos (MEM) (Tamarit et al., 2014) o la inclusión de variables *Dummy*, pueden mejorar estadísticamente los resultados (Torres et al., 2020).

En los ajustes de funciones de perfil del fuste o de sistema de ecuaciones simultáneas volumen comercial-ahusamiento se utilizan datos del mismo árbol; entonces, los componentes del error están correlacionados y el ajuste por MCO producirá estimadores teóricos robustos, pero ignorando los errores (Cruz-Cobos et al., 2008; Hernández et al., 2013). Para solventar problemas de multicolinealidad, la técnica de MEM es una opción viable (Pinheiro & Bates, 2000) en cualquiera de los tres enfoques de su aplicación: (I) Predicción de la variable de interés con mayor certeza mediante una mejora estadística (Cruz-Cobos et al., 2008; Tamarit et al., 2014); (II) Estimación de los componentes de varianza para ampliar su aplicabilidad o reducir el esfuerzo de muestreo (Saygili & Kahriman, 2023); y (III) La comprensión del fenómeno mediante la explicación de la interacción genotipo-ambiente (Balzarini, 2002; Bandera & Pérez, 2018).

Los MEM incorporan efectos aleatorios a sus parámetros, lo que influye favorablemente en el término de error (Correa & Salazar, 2016; Pinheiro et al., 2025), ya que corrigen la estructura de varianzas-covarianzas asociadas con datos lineales o de remediciones de los árboles, y se ha recurrido al uso de esta técnica para modelar los patrones de volumen y crecimiento de árboles, lo cual ha generado mejores resultados, con respecto a MCO (Zuur et al., 2009). En Michoacán, las plantaciones forestales (PF) son una opción para reducir la presión sobre los bosques ante la demanda de madera por la sociedad. Por lo anterior, existe la necesidad de contar con herramientas silvícolas cuantitativas acordes a las condiciones de cada especie para la gestión de los recursos, es así como se planteó el objetivo de ajustar una función de perfil fustal y definir su volumen fustal para árboles de *Pinus leiophylla*

Schiede ex Schltdl. & Cham. en la comunidad indígena Patamban, municipio Tangancícuaro, Michoacán, México.

Materiales y Métodos

El estudio se realizó en la comunidad indígena Patambán, Tangancícuaro, Michoacán, México, ubicada en la Meseta Tarasca que se encuentra en la región fisiográfica del Eje Neovolcánico como parte del sistema de sierra volcánica compleja y pequeños valles montañosos (pendientes 20-65 %) entre 1 700 y 3 500 m de altitud. Esta comunidad se localiza a una altitud de 1 740 m en las coordenadas geográficas 19°53'45.80" LN y 102°12'51.20" LO, en un clima templado subhúmedo con lluvias en verano y temperatura promedio de 16 a 18 °C, así como un suelo de tipo Andosol (Instituto Nacional de Estadística y Geografía [INEGI], 2010).

Se aplicó un muestreo aleatorio de 12 sitios cuadrangulares temporales de 20×20 m (400 m²), en cuatro plantaciones de *P. leiophylla*, con edades de 8 a 28 años. En cada sitio se recopilaron datos de densidad del arbolado (árboles ha⁻¹) y se eligieron 36 individuos dominantes en el sitio (tres árboles por sitio), a los cuales se le midió, de forma directa, el diámetro normal a la altura de 1.30 m sobre el suelo (d , m) con una cinta diamétrica marca *Forestry Suppliers Inc.*® modelo P. O. BOX JACKSON, además del diámetro a distintas alturas sobre el fuste (d_i) a 0.3, 0.7, 1.30 m y a cada 2.5 m de altura iniciando en el diámetro y altura del tocón. De manera indirecta, con el Telerrelascopio *Bitterlich*® modelo SW, hasta llegar a la altura total (A_t , m), y desde el diámetro del tocón ($d_i=0$) se determinaron las dimensiones de diámetro para posteriormente realizar los cálculos de ahusamiento a distintas alturas sobre el fuste de cada individuo (A_i , m).

Se calculó el volumen por sección ($V_{sección}$, m³) mediante la fórmula de *Smalian* (Ecuación 1) y el volumen de la punta (V_{punta} , m³) con la expresión del cono (Ecuación 2) (Niño et al., 2018). Estos volúmenes ($V_{sección}$ y V_{punta}) se sumaron para obtener el volumen fustal del árbol (V_f , m³).

$$V_{sección} = \left(\frac{g_{n-1} + g_i}{2} \right) \times L \quad (1)$$

$$V_{punta} = \left(\frac{g_n \times L}{3} \right) \quad (2)$$

Donde:

$V_{sección}$ = Volumen de la troza (m³)

V_{punta} = Volumen de la punta (m³)

g_{n-1} = Área basal del diámetro mayor de la troza (m²)

g_i = Área basal del diámetro menor de la troza (m²)

g_n = Área basal del diámetro mayor de la punta (m²)

L = Longitud de la troza (m)

Con 245 pares de datos de d_i y A_i se ajustaron ocho expresiones de ahusamiento (Pompa et al., 2009; Ramírez-Martínez et al., 2018; Torres et al., 2020) en el programa *Rstudio*® 2024.04.2 versión *Build 764*, en un primer enfoque a través de mínimos cuadrados no lineales (MCNL) con la función *nls* (Cuadro 1) (Baty et al., 2015; R Core Team, 2024). Para evitar problemas de convergencia estadística en los ajustes, se incluyó un valor de $\delta=0.01$ en d_i para impedir pérdida de observaciones y el valor de cero en A_i (Hernández et al., 2013).

Cuadro 1. Ecuaciones de ahusamiento empleadas para el ajuste.

| ID | Nombre | Expresión |
|------|-------------------------|--|
| (3) | <i>Clutter</i> | $di = \beta_1 d^{\beta_2} (At - Ai)^{\beta_3} At^{\beta_4} + \varepsilon$ |
| (4) | <i>Cielito 1</i> | $di = d \times \left[\beta_1 \times \frac{At - Ai}{At} + \beta_2 \times \left(\frac{At - Ai}{At} \right)^2 + \beta_3 \times \left(\frac{At - Ai}{At} \right)^3 \right]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon$ |
| (5) | <i>González</i> | $di = \beta_1 + \beta_2 d \times \left(1 - \frac{Ai}{At} \right) + \varepsilon$ |
| (6) | <i>Amidon</i> | $di = \beta_1 + d + \left(\frac{At - Ai}{At - 1.3} \right) + \beta_2 \times \frac{(At^2 - Ai^2)(Ai - 1.3)}{At^2} + \varepsilon$ |
| (7) | <i>Rentería</i> | $di = d \times \sqrt{\beta_1 \times \left(\frac{At - Ai}{At} \right) + \beta_2 \times \left(\frac{At - Ai}{At} \right)^2 + \beta_3 \times \left(\frac{At - Ai}{At} \right)^3} + \varepsilon$ |
| (8) | <i>Forslund</i> | $di = d \times \left(1 - \left(\frac{Ai}{At} \right)^{\beta_1} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} + \varepsilon$ |
| (9) | <i>Newnham</i> | $di = d \times \beta_1 \times \left(\frac{\frac{At}{Ai}}{At - 1.3} \right)^{\beta_2} + \varepsilon$ |
| (10) | <i>Rustagi-Loveless</i> | $di = \beta_1 + \beta_2 \times d \times \left(\frac{\frac{At}{Ai}}{At - 1.3} \right)^{\beta_3} + \varepsilon$ |

di = Diámetro a distintas alturas sobre el fuste (cm); d = Diámetro normal (m); At = Altura total (m); Ai = Altura a distintos di sobre el fuste; β_i = Parámetros a estimar; ε = Término de error.

La selección del modelo fue en función de la significancia del valor de los parámetros ($\alpha=0.05$), el coeficiente de determinación (R^2 , Ecuación 11), la raíz del cuadrado medio del error ($RCME$, Ecuación 12), criterio de información de *Akaike* (AIC , Ecuación 13) y Bayesiano (BIC , Ecuación 14), logaritmo natural de la función de verosimilitud ($F(\theta)$, Ecuación 15) y del sesgo (Ecuación 16) (Bronisz & Mehtätalo, 2020; Hernández et al., 2013).

$$R^2 = 1 - \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-p) \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2} \quad (11)$$

$$RCME = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-p}} \quad (12)$$

$$AIC = 2 \times p + n \times \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}\right) \quad (13)$$

$$BIC = n \times \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}\right) + p \times \ln(n) \quad (14)$$

$$\logLik = \prod_{i=1}^n f_i \times (y_i | \theta) \quad (15)$$

$$Sesgo = \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - \hat{y}_i}{n}\right) \quad (16)$$

Donde:

y_i , \hat{y}_i y \bar{y}_i = Valores observados, estimados y promedio, respectivamente

n = Número total de datos utilizados en el ajuste de los modelos

p = Número de parámetros (Cuadro 1)

f_i = Función de modelo

θ = Probabilidad de un vector de parámetro

\ln = Logaritmo natural

Una vez seleccionada la expresión base, esta se ajustó con la técnica de MEM con la función *n/m* por máxima verosimilitud (Pinheiro & Bates, 2000; Pinheiro et al., 2025;

R Core Team, 2024) y el método de expansión de Primer Orden (*FO*, *First-Order* por sus siglas en inglés) (Fu *et al.*, 2014; Yang & Huang, 2013), en el cual, el nivel de agrupación por individuo se incluyó de forma aditiva ($+u_i$) al valor de uno o la combinación de varios de sus parámetros fijos (β_i) (Zuur *et al.*, 2009). Por ejemplo, para la ecuación de *Clutter*: $di = \beta_1 d^{\beta_2} (At - Ai)^{(\beta_3 + u_i)} At^{\beta_4} + \varepsilon$ (Ecuación 17), y en donde el parámetro seleccionado para la inclusión de los efectos aleatorios es β_3 deberá de incluir los mejores valores de los estadísticos de *AIC*, *BIC* y *logLik*, que la *RCME* y Sesgo sean los más bajos, y que todos sus parámetros fuesen significativos ($\alpha=0.05$).

La corrección por heterocedasticidad se realizó a través de la expresión *varExp*: $var(\varepsilon_{ij}) = \exp^{2 \cdot \delta_1 \cdot v_i}$ (Ecuación 18), donde $var(\varepsilon_{ij})$ es la función de varianza evaluada en la covariable de varianza de los residuales del predictor (v_i); mientras que δ_1 y δ_2 se refieren a los coeficientes de la función de varianza, los cuales serán específicos para cada nivel (δ_i) (Bronisz & Mehtätalo, 2020; Pinheiro & Bates, 2000). Los problemas de medidas repetidas en un mismo individuo se abordaron a través de una estructura de correlación de media móvil de autocorrelación (ARMA) de orden (p, q), donde p y q son los números enteros no negativos que especifican respectivamente el orden autorregresivo y de promedio móvil de la estructura ARMA, en cuyo caso ambos tienen el valor predeterminado de 0 (Pinheiro *et al.*, 2025; Zuur *et al.*, 2009).

El cumplimiento de los supuestos de regresión se llevó a cabo mediante las pruebas gráficas de normalidad en la frecuencia de los residuos, distribución homocedástica de los residuales y la autocorrelación de los errores (Martínez-González *et al.*, 2014). De igual manera, se verificó la distribución de los valores aleatorios de los parámetros por árbol obtenida en el ajuste de MEM.

Se determinó la ecuación de *Vf* implícita de todas las expresiones de *di* (Cuadro 1) a través del valor de sus parámetros, para posteriormente integrar el valor del *d* a lo largo del fuste con respecto a *Ai* como un sólido en revolución; para el *Vt* se utilizó la Expresión 19 (Flores *et al.*, 2021; Hernández-Ramos *et al.*, 2018; Pompa *et al.*, 2009; Ramírez-Martínez *et al.*, 2018):

$$Vt = k \int_{A_1}^{A_2} d^2 \delta Ai \quad (19)$$

Donde:

Vt = Volumen fustal

k = Constante volumétrica

δ = Diferencial sobre la altura del fuste

A_1 y A_2 = Alturas que definen la integral y que pueden variar de $A_1=0$ hasta $A_2=At$

d = Diámetro normal (m)

Las estimaciones de Vf con los modelos implícitos se contrastaron a través de un análisis de los valores observados como medias independientes con una prueba de t a un $p=0.05$ (Infante & Zarate, 2012). Las hipótesis fueron: H_0 : no existe diferencia entre las estimaciones ($\mu_1=\mu_2$), y H_a : el valor real de la media poblacional (Vf) es distinto del valor que establece la H_0 ($\mu_1 \neq \mu_2$).

Resultados

El ajuste estadístico mostró parámetros no significativos ($a < 0.05$) en las expresiones de Cielito 1, Rentería y *Rustagi-Loveless*; las ecuaciones de *Amidon* y *Newnham* solo explicaron 42.6 y 78.9 % de la variabilidad muestral, respectivamente; mientras que *Clutter*, González y *Forslund* tuvieron un valor de R^2 mayor del 0.934. La expresión de

Clutter presentó los menores valores en *AIC*, *BIC* y *logLik*, así como las más pequeñas desviaciones de *RCME* y *Sesgo*; por lo cual fue seleccionada como la ecuación base para desarrollar el modelo compatible de ahusamiento y volumen (Cuadro 2).

Cuadro 2. Valores de los parámetros y criterios de bondad de ajuste de las funciones de ahusamiento por mínimos cuadrados no lineales.

| ID | Parámetro | Valor | Ee | Valor t | Pr> t | Est. | Valor | Est. | Valor |
|------|-----------|--------|------|---------|--------|-------------|---------|---------------|----------|
| (3) | β_1 | 2.310 | 0.21 | 11.16 | <0.001 | R^2 | 0.978 | <i>BIC</i> | 884.1 |
| | β_2 | 0.978 | 0.04 | 27.08 | <0.001 | <i>RCME</i> | 1.401 | <i>logLik</i> | -428.3 |
| | β_3 | 1.432 | 0.03 | 48.69 | <0.001 | <i>AIC</i> | 866.5 | <i>Sesgo</i> | 3.2E-02 |
| | β_4 | -1.670 | 0.05 | -30.87 | <0.001 | | | | |
| (4) | β_1 | 1.205 | 0.21 | 5.84 | <0.001 | R^2 | 0.973 | <i>BIC</i> | 925.6 |
| | β_2 | 1.045 | 0.61 | 1.70 | 0.090 | <i>RCME</i> | 1.539 | <i>logLik</i> | -451.8 |
| | β_3 | 0.210 | 0.43 | 0.49 | 0.627 | <i>AIC</i> | 911.6 | <i>Sesgo</i> | 9.0E-02 |
| (5) | β_1 | -1.211 | 0.24 | -4.96 | <0.001 | R^2 | 0.951 | <i>BIC</i> | 1 065.4 |
| | β_2 | 1.204 | 0.02 | 68.99 | <0.001 | <i>RCME</i> | 2.067 | <i>logLik</i> | -524.5 |
| | | | | | | <i>AIC</i> | 1 054.9 | <i>Sesgo</i> | 9.9E-09 |
| (6) | β_1 | -4.640 | 0.52 | -8.96 | <0.001 | R^2 | 0.426 | <i>BIC</i> | 1670.6 |
| | β_2 | -3.237 | 0.27 | -11.81 | <0.001 | <i>RCME</i> | 7.105 | <i>logLik</i> | -827.0 |
| | | | | | | <i>AIC</i> | 1 660.1 | <i>Sesgo</i> | 6.1E-10 |
| (7) | β_1 | 0.046 | 0.05 | 0.93 | 0.356 | R^2 | 0.973 | <i>BIC</i> | 927.2 |
| | β_2 | -0.047 | 0.21 | -0.22 | 0.823 | <i>RCME</i> | 1.544 | <i>logLik</i> | -452.6 |
| | β_3 | 1.492 | 0.18 | 8.46 | <0.001 | <i>AIC</i> | 913.2 | <i>Sesgo</i> | 9.6E-02 |
| (8) | β_1 | 1.780 | 0.14 | 13.15 | <0.001 | R^2 | 0.934 | <i>BIC</i> | 1 140.6 |
| | β_2 | 0.463 | 0.05 | 8.76 | <0.001 | <i>RCME</i> | 2.409 | <i>logLik</i> | -562.1 |
| | | | | | | <i>AIC</i> | 1 130.1 | <i>Sesgo</i> | 1.1E+00 |
| (9) | β_1 | 0.799 | 0.02 | 51.55 | <0.001 | R^2 | 0.789 | <i>BIC</i> | 1 425.6 |
| | β_2 | 0.401 | 0.02 | 23.97 | <0.001 | <i>RCME</i> | 4.309 | <i>logLik</i> | -704.5 |
| | | | | | | <i>AIC</i> | 1 415.0 | <i>Sesgo</i> | -3.9E-01 |
| (10) | β_1 | 0.277 | 0.19 | 1.43 | 0.153 | R^2 | 0.978 | <i>BIC</i> | 877.3 |
| | β_2 | 1.002 | 0.01 | 88.58 | <0.001 | <i>RCME</i> | 1.395 | <i>logLik</i> | -427.6 |
| | β_3 | 1.472 | 0.04 | 38.28 | <0.001 | <i>AIC</i> | 863.3 | <i>Sesgo</i> | -1.8E-10 |

E_e = Error estándar; Est. = Estadístico; R^2 = Coeficiente de determinación; $RCME$ = Raíz del cuadrado medio del error; AIC y BIC = Criterio de información de *Akaike* y Bayesiano, respectivamente; $logLik$ = Logaritmo de verosimilitud.

Al incluir el efecto aleatorio de manera aditiva por individuo, como un nivel de agrupación en la expresión de *Clutter*, resultó que al considerar el efecto en dos o más parámetros, los valores no fueron significativos ($\alpha < 0.05$); mientras que, al utilizar los parámetros β_1 , β_2 y β_4 los valores de R^2 , AIC , BIC , $logLik$, $RCME$ y Sesgo no mejoraron las estimaciones en el *di*; en contraste de cuando se utilizó β_3 , el cual está relacionado con la diferencia entre A_t y A_i de cada árbol. Además, el ajuste por MEM mejoró en 2.28 % los valores de verosimilitud, con respecto al ajuste a través de MCNL; mientras que el Sesgo se redujo alrededor de 56.8 % (Cuadro 3).

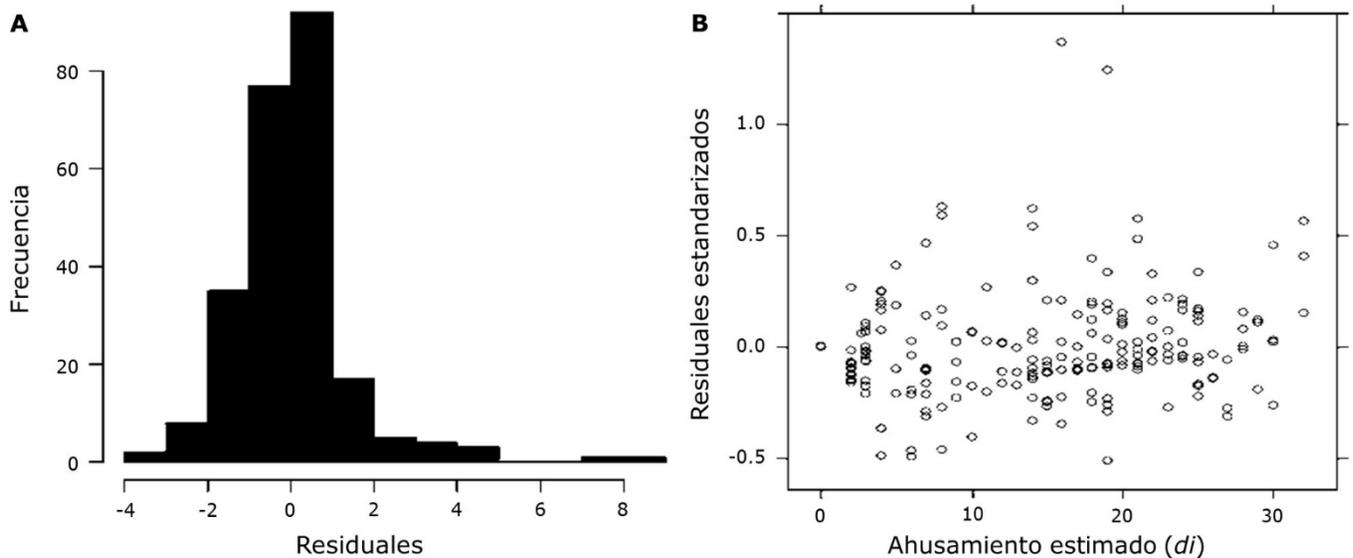
Cuadro 3. Valores de los parámetros y criterios de bondad de ajuste del modelo de ahusamiento *Clutter* ajustado con la técnica de modelos de efectos mixtos.

| Modelo | Parámetro | Valor | E_e | Valor t | $Pr > t $ | Est. | Valor | Est. | Valor |
|--------|--------------------|------------------------------------|---------------------------------|-----------|------------|--------|-------|----------|----------|
| (17) | β_1 | 2.256 | 0.23 | 9.99 | <0.001 | R^2 | 0.978 | BIC | 873.3 |
| | β_2 | 0.943 | 0.04 | 23.33 | <0.001 | $RCME$ | 1.406 | $logLik$ | -414.7 |
| | β_3^* | 1.434 | 0.03 | 41.28 | <0.001 | AIC | 845.3 | Sesgo | 1.38E-02 |
| | β_4 | -1.617 | 0.06 | -26.49 | <0.001 | | | | |
| | $varExp$ | -0.01 | Valor de la función de varianza | | | | | | |
| Phi | 0.313 | Estructura de correlación: ARMA(1) | | | | | | | |
| | | | $DesEst$ | | Residual | | | | |
| | Efectos aleatorios | | 0.000074 | | 1.63308 | | | | |

E_e = Error estándar; R^2 = Coeficiente de determinación; $RCME$ = Raíz del cuadrado medio del error; AIC y BIC = Criterio de información de *Akaike* y Bayesiano, respectivamente; $logLik$ = Logaritmo de verosimilitud; $DesEst$ = Desviación estándar; ARMA = Estructura de correlación de media móvil de autocorrelación; * =

Parámetro con inclusión del efecto aleatorio; $varExp$ = Valor de la función de varianza; Phi = Estructura de correlación: ARMA(1).

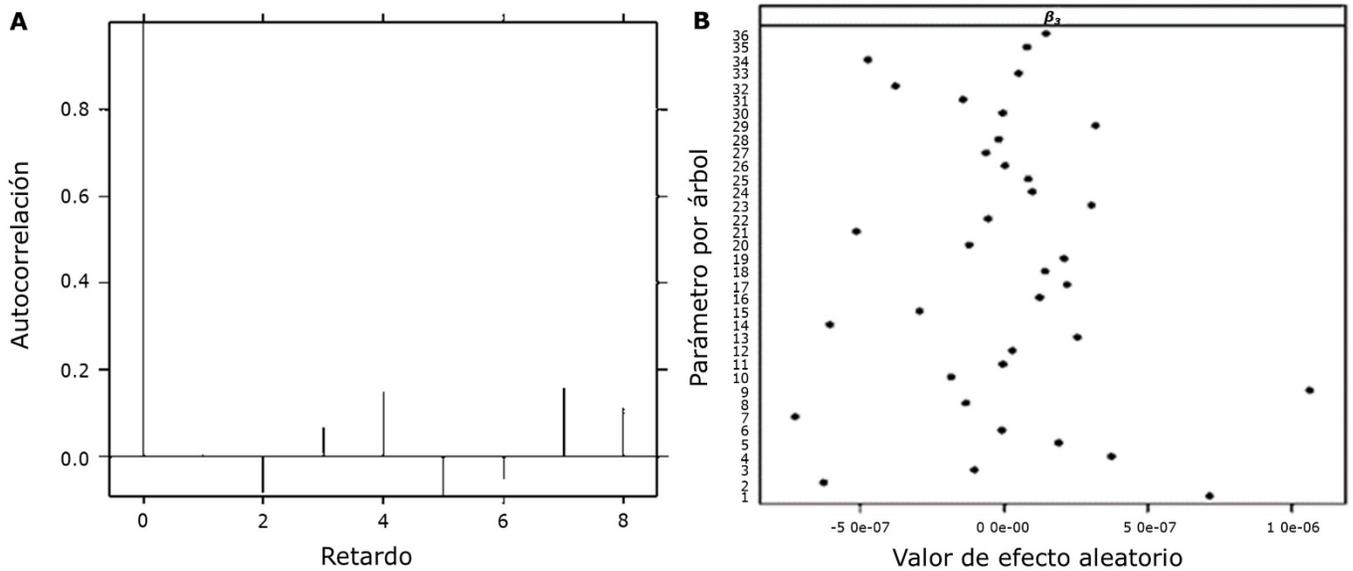
Al evaluar de forma gráfica los supuestos de regresión, se observó una distribución en la frecuencia de los residuales con forma de campana de *Gauss* (Figura 1A), y residuos homocedásticos alrededor de cero (Figura 1B), lo cual indicó el cumplimiento de normalidad y la falta de heterocedasticidad en los residuos.



A = Normalidad; B = Homocedasticidad.

Figura 1. Pruebas gráficas del modelo de ahusamiento *Clutter* ajustado por modelos de efectos mixtos.

Los valores de autocorrelación parcial fueron menores a 0.2 (Figura 2A) y señalaron el cumplimiento del supuesto de regresión en los errores obtenidos del ajuste. Además, se graficó el valor del efecto aleatorio por individuo dentro del parámetro fijo seleccionado (β_3), lo que demostró la variabilidad del d_i en la muestra utilizada (Figura 2B).



A = Autocorrelación de los residuales; B = Distribución de los valores aleatorios de los parámetros árbol por árbol.

Figura 2. Pruebas gráficas del modelo de ahusamiento *Clutter* ajustado por modelos de efectos mixtos.

Con el objetivo de ampliar la aplicabilidad del ajuste presentado, se determinaron los valores de la matriz de varianza-covarianza (vcov) mediante los MEM (Cuadro 4), con la idea de una posible calibración con datos independientes a la muestra del parámetro relacionado a la diferencia entre A_t y A_i (β_3), cuando se trata de evaluar la variabilidad del d_i en individuos con características distintas a la información empleada para el ajuste o fuera del área geográfica donde se desarrollan las PF de la especie en estudio.

Cuadro 4. Matriz de varianza-covarianza (vcov) del ajuste por MEM de la expresión de ahusamiento de *Clutter*.

| vcov | β_1 | β_2 | β_3 | β_4 |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| β_1 | 0.05010 | -0.00384 | 0.00034 | -0.00463 |

| | | | | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|
| β_2 | -0.00384 | 0.00161 | -0.00001 | -0.00132 |
| β_3 | 0.00034 | -0.00001 | 0.00119 | -0.00119 |
| β_4 | -0.00463 | -0.00132 | -0.00119 | 0.00367 |

Con la finalidad de identificar los modelos implícitos de Vf de cada expresión de di , se obtuvieron formas matemáticas para estimar el Vf de tipo *Schumacher-Hall* para los modelos de *Clutter*, *Cielito 1* y *Rentería*; *González*, *Amidon* y *Newnham* en su estructura incluyen la forma de variable combinada ($d^2 \times At$), pero en lo global la expresión matemática implícita es poco aplicable; los modelos *Forslund* y *Rustagi-Loveless* no tienen una solución matemática explícita, por lo cual no se incluyen en el Cuadro 5.

Cuadro 5. Modelos de volumen fustal (Vf) implícito dentro de las funciones de ahusamiento ajustadas al considerar el diámetro normal (d , m) y altura total (At , m) como variables explicativas.

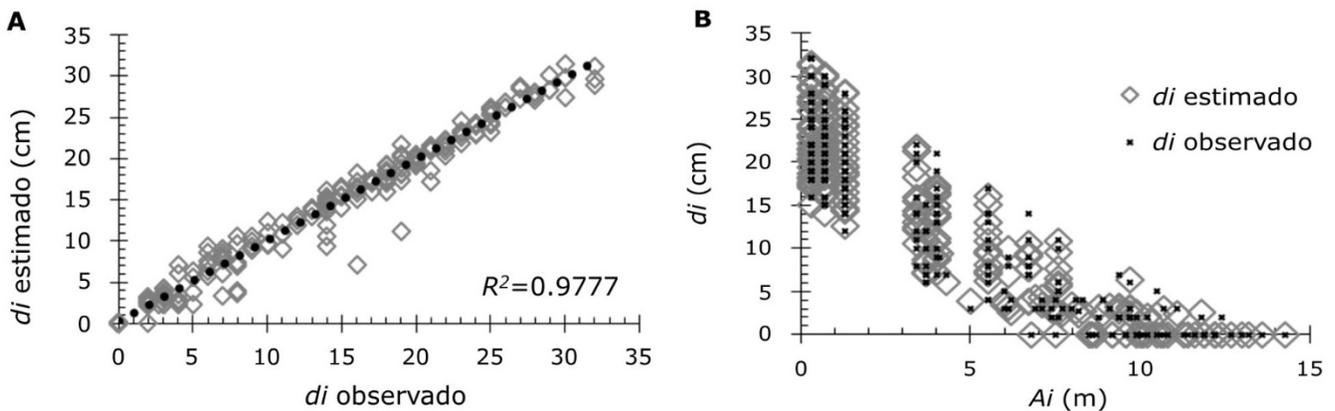
| ID | Modelo de volumen implícito |
|------|--|
| (3) | $Vf = 1.3814 \times At^{0.5227} \times d^{3.6570}$ |
| (17) | $Vf = 1.3150 \times At^{0.6345} \times d^{3.8853}$ |
| (4) | $Vf = 1.0212 \times d^4 \times At$ |
| (5) | $Vf = 1.4665(d^2 \times At) + 1.4576(d^3 \times At) + 0.4829(d^4 \times At)$ |
| (6) | $Vf = \frac{1}{(At - 1.3)^2} \times (d^2 \times At(0.7981 \times At^4 + 0.1385 \times At^3 - 1.2491 \times At^2 - 6.3511 \times At) + 8.3470 + 1.5383 \times d \times At^2 - 1.6183 \times d \times At^3 + 5.5047 \times d \times At + d^2 \times At^2 - 2.6000 \times d^2 \times At + 1.6900 \times d^2 - 6.2007 \times d)$ |
| (7) | $Vf = 0.3806 \times d^4 \times At$ |
| (9) | $Vf = \frac{d^2 \times At \left(\begin{aligned} &0.2546 \times d^2 \times At^2 \left(\frac{At}{At - 1.3} \right)^{0.9446} + 0.2242 \times d \times At^2 \left(\frac{At}{At - 1.3} \right)^{0.9446} + \\ &0.0765 \times At^2 - 0.2242 \times d \times At \left(\frac{At}{At - 1.3} \right)^{0.9446} \times 1.3 - 0.1530 \times At \times 1.3 + 0.1293 \end{aligned} \right)}{(At - 1.3)^2}$ |

Vf = Volumen fustal; d = Diámetro normal; At = Altura total.

Al contrastar las estimaciones con estos modelos implícitos y el Vf observado se tuvieron diferencias significativas ($DMS=0.1313$, $F=84.36$; $error=0.0367$, $p<0.0001$). De acuerdo con *Tukey* ($\alpha=0.05$), las estimaciones formaron dos grupos:

uno en el cual los modelos implícitos de *Clutter*, *Renteria*, *Amidon* y *Newnham*, con respecto de los datos observados son iguales, y otro con el de *Gonzáles*. Sin embargo, los parámetros de la expresión de *Schumacher-Hall* (Ecuación 17) derivada de la función d_i de *Clutter* (Ecuación 3) son compatibles y es posible llegar a una expresión de volumen comercial (V_c), si así se desea.

La Figura 3 muestra una tendencia lineal entre las estimaciones de ahusamiento realizadas con la ecuación de *Clutter* versus los valores observados y una descripción acorde con la forma de los árboles, por lo que se confirma la explicación de la tendencia de la información al describir el perfil de los árboles establecidos en plantaciones de *Pinus leiophylla*.



A = Para árboles de *Pinus leiophylla* Schiede ex Schltdl. & Cham.; B = Descripción del ahusamiento versus estimaciones de d_i a diferentes A_i con la ecuación de *Clutter*.

Figura 3. Comparación del diámetro observado (d_i) a distintas secciones del fuste (A_i) contra el predicho (ahusamiento).

Discusión

Aun cuando la presencia de varianza no constante en la distribución de residuales (heterocedasticidad) es común al relacionar variables biológicas, no invalida los estimadores obtenidos por MCNL, ya que continúan siendo insesgados y dejan de tener una varianza mínima (Hernández *et al.*, 2013); el enfoque de MEM aplicado en el presente estudio fue viable para la corrección de ese problema al modelar el *di*. En este sentido, Cruz-Cobos *et al.* (2008) al utilizar los MEM, flexibilizaron un modelo lineal polinómico e incrementaron la capacidad predictiva de la expresión *di* de Cielito 1 para árboles de *Pinus cooperi* C. E. Blanco en Durango, México.

Tamarit *et al.* (2014) utilizaron los MEM e incluyeron el efecto aleatorio dentro de un sistema compatible de *di-Vc*, con ello lograron una mejora estadística con respecto a MCNL, porque se propició un control de la variabilidad específica por individuo; además, se mejoró significativamente el valor del error estándar de los parámetros del modelo y se redujo el Sesgo individual por estimación debido a que la técnica MEM agrupa la variabilidad de forma específica por nivel (individuo), lo que incrementa la verosimilitud en el ajuste estadístico del valor de cada parámetro y se reducen las desviaciones (Pinheiro *et al.*, 2025; Zuur *et al.*, 2009).

La corrección de autocorrelación de los errores aplicada en este estudio, al incluir una estructura de tipo ARMA ($p=1, q=0$), muestra resultados satisfactorios, semejantes a los obtenidos por Hernández-Ramos *et al.* (2018) y Flores *et al.* (2021) al modelar el *di* de árboles clonales de *Eucalyptus urophylla* S. T. Blake en Huimanguillo, Tabasco, México, y de *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el ejido Corona del Rosal, Nuevo León, México, respectivamente. En ambos casos se aplicó un retardo en los residuales (lar1) con una estructura CAR (1). El mismo efecto favorable lo obtuvieron Torres *et al.* (2020) para tres procedencias de *Pinus caribaea* Morelet var. *hondurensis* (Sénécl.) W. H. Barrett & Golfari y *Pinus elliottii* Engelm. var. *elliottii* Engelm. en PF

establecidas en las Choapas, Veracruz, México, cuando consideraron una estructura autorregresiva de Primer Orden (AR1).

La robustez del ajuste estadístico tal y como lo citan Zhang et al. (2021) y demuestran Shin et al. (2022) al comparar los estadísticos clásicos documentados en estudios de ahusamiento (R^2 , $RCME$, AIC , BIC y $logLik$), proporcionan la oportunidad de realizar estimaciones confiables de ahusamiento. Además, complementariamente, se puede integrar algebraicamente la ecuación obtenida para dar como resultado su ecuación de V_f implícita o de volumen comercial (V_c) que describe la distribución de productos siguiendo el procedimiento descrito por McTague y Weiskittel (2021) para expresiones matemáticas de d_i , como el modelo de *Clutter*.

Autores como Niño et al. (2018), al derivar el modelo de volumen comercial compatible para ajustarlo de manera simultánea, logran resultados satisfactorios, ya que obtienen, justamente, expresiones de V_f y V_c , además de modelar el ahusamiento. Esta estrategia también la aplican Cruz-Cobos et al. (2008), Hernández-Ramos et al. (2018) y Torres et al. (2020) para modelar el d_i con distintas técnicas de ajuste y enfoques con lo que generan, en todos los casos, una expresión de V_f aplicable a la muestra de árboles analizada para taxones y regiones específicas.

El modelo de ahusamiento de *Clutter* es robusto estadísticamente (Shin et al., 2022; Zhang et al., 2021), por lo que es confiable para describir el perfil fustal de los individuos en las PF de *Pinus leiophylla*. Ramírez-Martínez et al. (2018) al modelar el d_i mediante la expresión de Cielito 2, también determinaron a la expresión de *Schumacher-Hall* como adecuada para predecir el V_f en árboles de *Pinus ayacahuite* C. Ehrenb. ex Schldl. en bosques de Ixtlán de Juárez, Oaxaca, México. Además, al usar expresiones compatibles para estimar el d_i y el V_f se reducen los sesgos de estimación de forma operativa, como lo describen Pompa et al. (2009) con la expresión de *Biging* y la expresión implícita de tipo coeficiente mórfico constante para *Pinus arizonica* Engelm., en el suroeste de Chihuahua, México.

El modelo para el V_f de *Schumacher-Hall* derivado de la expresión de ahusamiento de *Clutter* concuerda con la expresión de Cruz-Cobos et al. (2008), pero proveniente del modelo de d_i de Cielito 1. Los resultados difieren de lo señalado por Torres et al. (2020), quienes presentan una forma matemática compleja, poco aplicable en la práctica, la cual contiene en su estructura una expresión de variable combinada, semejante a los modelos de V_f obtenidos en este trabajo para las ecuaciones de *Amidon* (Ecuación 6) y *Newnham* (Ecuación 9) (Cuadro 3); también contrasta con lo indicado por Pompa et al. (2009), cuyo modelo para V_f es de tipo coeficiente mórfico, el cual es compatible con la expresión de *Biging*.

En general, el ajuste bajo el enfoque de MEM presentado en este trabajo supera los problemas de heterocedasticidad y multicolinealidad clásicos en datos biológicos y longitudinales (Correa & Salazar, 2016; Pinheiro & Bates, 2000; Pinheiro et al., 2025; Zuur et al., 2009). Además, reduce las desviaciones en la estimación de la variable de interés con mayor certeza mediante una mejora estadística (Cruz-Cobos et al., 2008; Tamarit et al., 2014). Sin embargo, están aún pendientes por explorar otras estrategias y enfoques de análisis, tal como los modelos basados en la biología de la forma y el crecimiento del tallo, o bien en cuantificar el efecto de la ubicación geográfica de las especies (McTague & Weiskittel, 2021).

Los valores de la matriz de varianza-covarianza registrados dan la pauta para realizar una calibración posterior para expandir su aplicabilidad, como lo proponen Çakir y Kahrman (2018) y Saygili y Kahrman (2023) con base en la metodología propuesta por Şenyurt et al. (2017), Yang et al. (2009) y Zhang et al. (2021), de modo que pueda usarse para el modelo de ahusamiento de *Clutter* en el parámetro β_3 relacionado a la diferencia entre A_t y A_i .

Conclusiones

La estrategia de ajuste de MEM aplicada para modelar el ahusamiento de árboles de *Pinus leiophylla* es satisfactoria para corregir los problemas de heterocedasticidad y de autocorrelación de los errores. También se registra una mejora estadística y una reducción de sesgo individual en las estimaciones, en contraste con el ajuste por Mínimos cuadrados no lineales (MCNL).

El modelo de ahusamiento de *Clutter* y su respectiva expresión de volumen fustal de tipo *Schumacher-Hall* son compatibles en sus parámetros y confiables para describir el perfil fustal de árboles de *Pinus leiophylla*, por lo que pueden utilizarse con certidumbre en la proyección de existencias maderables para un mercado diferenciado de las plantaciones forestales evaluadas de *P. leiophylla*.

Agradecimientos

A la Comunidad Indígena Patambán, Tangancícuaro, Michoacán, México por permitir el acceso para realizar el estudio en sus plantaciones forestales y al Instituto Nacional de Investigaciones Forestales, Agrícolas y Pecuarias (INIFAP) por otorgar el financiamiento del proyecto: "Estimación de carbono almacenado en plantaciones forestales comerciales de pino en la Sierra Purhépecha, Michoacán".

Conflicto de intereses

Los autores declaramos no tener conflicto de intereses.

Contribución por autor

H. Jesús Muñoz-Flores: trabajo de campo, depuración y análisis de información, revisión y corrección de texto; Jonathan Hernández-Ramos: conceptualización de la investigación, depuración y análisis de información, revisión y corrección de texto; Rubén Barrera-Ramírez: trabajo de campo, depuración y análisis de información, redacción del manuscrito; Xavier García-Cuevas: conceptualización de la investigación, depuración y análisis de información, revisión y corrección de texto; Adrián Hernández-Ramos: conceptualización de la investigación, redacción del manuscrito; Martín Gómez-Cárdenas: trabajo de campo, redacción del manuscrito.

Referencias

- Balzarini, M. (2002). Applications of mixed models in plant breeding. In M. S. Kang (Ed.), *Quantitative genetics, genomics and plant breeding* (pp. 353-363). CABI Publishing.
https://www.researchgate.net/publication/286931755_Applications_of_Mixed_Models_in_Plant_Breeding
- Bandera F., E., y Pérez P., L. (2018). Los modelos lineales generalizados mixtos. Su aplicación en el mejoramiento de plantas. *Cultivos Tropicales*, 39(1), 127-133.
<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=193260614019>
- Baty, F., Ritz, C., Charles, S., Brutsche, M., Flandrois, J.-P., & Delignette-Muller, M.-L. (2015). A toolbox for nonlinear regression in R: The rackage nlstools. *Journal of Statistical Software*, 66(5), 1-21. <https://www.jstatsoft.org/article/view/v066i05>
- Bronisz, K., & Mehtätalo, L. (2020). Mixed-effects generalized height–diameter model for young silver birch stands on post-agricultural lands. *Forest Ecology and Management*, 460, Article 117901. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2020.117901>

- Çakir, C. Y., & Kahrman, A. (2018). Modeling stem profile of Caucasian fir and Oriental spruce mixed stands in Turkey using nonlinear mixed-effects models. *Applied Ecology and Environmental Research*, 16(5), 6815-6833. https://aloki.hu/pdf/1605_68156833.pdf
- Correa M., J. C., y Salazar U., J. C. (2016). *Introducción a los modelos mixtos*. Universidad Nacional de Colombia. https://medellin.unal.edu.co/todos-los-libros/images/gratuitos/pdf/Introduccion-a-los-modelos-Mixtos_Mayo_2017.pdf
- Cruz-Cobos, F., De los Santos-Posadas, H. M., y Valdez-Lazalde, J. R. (2008). Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus cooperi* Blanco en Durango, México. *Agrociencia*, 42(4), 473-485. <https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/646>
- Cruz-Cobos, F., Quiñonez-Barraza, G., Hernández-Merino, V., Corral-Rivas, S., y Nava-Nava, A. (2023). Sistemas compatibles de ahusamiento y volumen comercial para dos especies de *Pinus* en Durango, México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 14(77), 76-102. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v14i77.1383>
- Flores M., E. A., Rodríguez A., A. C., Aguirre C., O. A., Alanís R., E., y Quiñonez B., G. (2021). Sistema compatible de ahusamiento-volumen para *Pinus pseudostrobus* Lindl. en el ejido Corona del Rosal, Nuevo León, México. *Madera y Bosques*, 27(2), Artículo e2722130. <https://doi.org/10.21829/myb.2021.2722130>
- Fu, L., Wang, M., Lei, Y., & Tang, S. (2014). Parameter estimation of two-level nonlinear mixed effects models using first order conditional linearization and the EM algorithm. *Computational Statistics & Data Analysis*, 69, 173-183. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2013.05.026>
- García-Espinoza, G. G., Aguirre-Calderón, O. A., Vargas-Larreta, B., Martínez-Ángel, L., García-Magaña, J. J., y Hernández-Ramos, J. (2019). Sistema compatible de ahusamiento y volumen comercial de *Pinus pseudostrobus* Lindl. en Nuevo San Juan Parangaricutiro, Michoacán, México. *Agrociencia*, 53(1), 115-131. <https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/1755>

Hernández P., D., de los Santos P., H. M., Ángeles P., G., Valdez L., J. R., y Volke H., V. H. (2013). Funciones de ahusamiento y volumen comercial para *Pinus patula* Schlttdl. et Cham. en Zacualtipán, Hidalgo. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 4(16), 34-45. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v4i16.439>

Hernández-Ramos, J., De los Santos-Posadas, H. M., Valdéz-Lazalde, J. R., Tamarit-Urias, J. C., Ángeles-Pérez, G., Hernández-Ramos, A., y Peduzzi, A. (2018). Funciones de ahusamiento para clones de *Eucalyptus urophylla* establecidos en plantaciones comerciales en Huimanguillo, Tabasco, México. *Agrociencia*, 52(7), 1013-1029. <https://agrociencia-colpos.org/index.php/agrociencia/article/view/1719/1719>

Hernández-Ramos, J., Hernández-Ramos, A., García-Magaña, J. de J., García-Cuevas, X., García-Espinoza, G. G., Muñoz-Flores, H. J., y Olvera-Delgadillo, E. H. (2017). Sistema compatible de ahusamiento-volumen comercial para plantaciones de *Pinus greggii* Engelm. en Hidalgo, México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 8(39), 59-70. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v8i39.43>

Infante G., S., y Zárate de L., G. P. (2012). *Métodos estadísticos: un enfoque interdisciplinario* (3^{ra} Edición). Editorial del Colegio de Postgraduados.

<https://archive.org/details/libro-metodos-estadisticos-infante-y-zarate-2/page/n1/mode/2up>
Instituto Nacional de Estadística y Geografía. (2010). *Compendio de información geográfica municipal de los Estados Unidos Mexicanos. Tangancícuaro, Michoacán de Ocampo, clave geoestadística 16085*. Instituto Nacional de Estadística y Geografía. https://www.inegi.org.mx/contenidos/app/mexicocifras/datos_geograficos/16/16085.pdf

Martínez-González, M. A., Sánchez-Villegas, A., Toledo A., E., y Faulin F., J. (Edits.). (2014). *Bioestadística amigable* (3^{ra} Edición). Elsevier España, S. L. <https://www.unav.edu/documents/16089811/16155256/indice-bioestadistica-amigable-3-edicion.pdf>

McTague, J. P., & Weiskittel, A. (2021). Evolution, history, and use of stem taper equations: a review of their development, application, and implementation. *Canadian Journal of Forest Research*, 51(2), 210-235. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2020-0326>

- Monárrez-González, J. C., Márquez-Linares, M. A., López H., J. A., Pérez V., G., Quiñonez B., G., y García C., X. (2024). Ecuaciones de volumen fustal-total y ahusamiento para especies maderables del ecosistema templado en Puebla, México. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 15(84), 4-28. <https://doi.org/10.29298/rmcf.v15i84.1440>
- Niño L., G. S., Ramos M., P. A., Barrios, A., y López A., A. M. (2018). Modelos compatibles de ahusamiento-volumen para árboles de *Gmelina arborea* Roxb. en el Alto Magdalena, Colombia. *Colombia Forestal*, 21(2), 174-187. <https://doi.org/10.14483/2256201X.12249>
- Pinheiro, J. C., & Bates, D. M. (2000). *Mixed-effects models in S and S-PLUS*. Springer. <https://doi.org/10.1007/b98882>
- Pinheiro, J. C., Bates, D., DebRoy, S., Sarkar, D., Heisterkamp, S., Van Willigen, B., & Ranke, J. (2025). *Linear and Nonlinear Mixed Effects Models. Package 'nlme': Version 3.1-168*. Comprehensive R Archive Network. <https://cran.r-project.org/web/packages/nlme/nlme.pdf>
- Pompa G., M., Corral R., J. J., Díaz V., M. A., y Martínez S., M. (2009). Función de ahusamiento y volumen compatible para *Pinus arizonica* Engelm. en el suroeste de Chihuahua. *Revista Ciencia Forestal en México*, 34(105), 119-136. <https://cienciasforestales.inifap.gob.mx/index.php/forestales/article/view/695>
- R Core Team. (2024). RStudio Builds 2024.04.2 (version Build 764) [Software]. R Foundation for Statistical Computing. <https://dailies.rstudio.com/version/2024.04.2+764/>
- Rachid C., C., Mason E., G., Wollons, R., & Resquin, F. (2014). Volume and taper equations for *P. taeda* (L.) and *E. grandis* (Hill ex. Maiden). *Agrociencia Uruguay*, 18(2), 47-60. <http://www.ainfo.inia.uy/digital/bitstream/item/13335/1/Rachid-Agrociencia-2014.pdf>
- Ramírez-Martínez, A., Santiago-García, W., Quiñonez-Barraza, G., Ruiz-Aquino, F., y Antúnez, P. (2018). Modelación del perfil fustal y volumen total para *Pinus ayacahuite*

- Ehren. *Madera y Bosques*, 24(2), Artículo e2421496.
<https://doi.org/10.21829/myb.2018.2421496>
- Saygili, B., & Kahriman, A. (2023). Modeling compatible taper and stem volume of pure Scots pine stands in Northeastern Turkey. *iForest*, 16(1), 38-46.
<https://doi.org/10.3832/ifor4099-015>
- Şenyurt, M., Ercanlı, İ., & Bolat, F. (2017). Taper equations based on nonlinear mixed effect modeling approach for *Pinus nigra* in Çankırı forests. *Bosque*, 38(3), 545-554.
<http://dx.doi.org/10.4067/S0717-92002017000300012>
- Shin, J.-H., Han, H., Ko, C.-U., Kang, J.-T., & Kim, Y.-H. (2022). Applying nonlinear mixed-effects models to taper equations: a case study of *Pinus densiflora* in Gangwon province, Republic of Korea. *Journal of Korean Society of Forest Science*, 111(1), 136-149. <https://doi.org/10.14578/jkfs.2022.111.1.136>
- Tamarit U., J. C., De los Santos P., H. M., Aldrete, A., Valdez L., J. R., Ramírez M., H., y Guerra De la C., V. (2014). Sistema de cubicación para árboles individuales de *Tectona grandis* L. f. mediante funciones compatibles de ahusamiento-volumen. *Revista Mexicana de Ciencias Forestales*, 5(21), 58-77.
<https://doi.org/10.29298/rmcf.v5i21.358>
- Torres A., D., de los Santos P., H. M., Velázquez M., A., y Tamarit U., J. C. (2020). Ahusamiento y volumen comercial de tres procedencias de pinos tropicales en plantaciones forestales de Veracruz, México. *Madera y Bosques*, 26(3), Artículo e2631890.
<https://myb.ojs.inecol.mx/index.php/myb/article/download/1890/e2631890/12514>
- Yang, Y., & Huang, S. (2013). On the statistical and biological behaviors of nonlinear mixed forest models. *European Journal of Forest Research*, 132, 727-736.
<https://doi.org/10.1007/s10342-013-0705-2>
- Yang, Y., Huang, S., Trincado, G., & Meng, S. X. (2009). Nonlinear mixed-effects modeling of variable-exponent taper equations for lodgepole pine in Alberta, Canada. *European Journal of Forest Research*, 128, 415-429.
<https://doi.org/10.1007/s10342-009-0286-2>

Zhang, S., Sun, J., Duan, A., & Zhang, J. (2021). Variable-exponent taper equation based on multilevel nonlinear mixed effect for Chinese Fir in China. *Forests*, 12(2), 126. <https://doi.org/10.3390/f12020126>

Zuur, A. F., Ieno, E. N., Walker, N., Saveliev, A. A., & Smith, G. M. (2009). *Mixed effects models and extensions in ecology with R*. Springer. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-87458-6>



Todos los textos publicados por la **Revista Mexicana de Ciencias Forestales** –sin excepción– se distribuyen amparados bajo la licencia *Creative Commons 4.0 Atribución-No Comercial (CC BY-NC 4.0 Internacional)*, que permite a terceros utilizar lo publicado siempre que mencionen la autoría del trabajo y a la primera publicación en esta revista.